深圳高级中学国际部

第一届 SCC 微积分邀请赛

深高积委会-SID Calculus Committee

November 2024

目录

1 前言

1.1 关于微积分

微积分，数学概念，是高等数学中研究函数的微分、积分以及有关概念和应用的数学分支。
它是数学的一个基础分支，内容主要包括极限、微分学、积分学及其应用。
微分学，包括求导的运算，是一套关于变化率的理论。它使得函数、速度、加速度和曲线的斜率等均可用一套通用的符号进行讨论。
积分学，包括求积分的运算，为计算面积、体积等提供一套通用的方法。

1.2 关于比赛

1.本次比赛为积分制比赛，满分 100 分，新手题每题得 4 分，入门题每题得 7 分，中档题每题得 10-15 分。
2.比赛选手将在问卷星上完成题目，请参赛选手认真阅读相关要求。
3.累计得分前十名将在（时间，地点待定）决赛。
4.决赛拟以如下方式举行：
前 10 名学生同时比赛，题目将在大屏幕上依次放出。任意一题未解得答案者淘汰，直至 10 名学生只剩 3 名或所有题目解完。
前十名同学每人均将获得方糕一支，前三名同学或所有题目解完后仍未被淘汰的同学将获得额外礼品。
*在特殊情况下，如果有公认的数学水平较为突出的同学因为一些原因不能填写问卷星，他可能会被邀请而获得直接参加决赛的资格。
*可向高一国际一班肖辅成（wx: 13692219237），国际二班沈迪夫（wx：13480619536）提名特定同学直接获得决赛资格。

1.3 关于组织

本次比赛的举办方为：
***深圳高级中学国际部 SID 微积分委员会**（简称**深高积委会**或 **SCC**）
是深圳高级中学国际部的一个非官方组织（本组织的任何行为不代表学校官方）。委员会成立的目的是鼓励各年级数学爱好者的交流，旨在让数学爱好者们不断学习新知，从而提升并超越自我。

SID微积分委员会-SID CALCULUS COMMITTEE

深圳高级中学（集团）
Shenzhen Senior High School Group

2 试题部分

*定积分题目应保留三位有效数字

2.1 新手题（4’）

1.

$$\int_0^{\pi} \sin x \, dx$$

2.

$$\int_0^2 e^{2x} dx$$

3.

$$\int_1^e \frac{1}{x} \, dx$$

4.

$$\int \frac{1}{9 + x^2} \, dx$$

5.

$$\int \ln 3.81 * 3.81^x \, dx$$

2.2 入门题（7’）

1.

$$\int_0^{\pi} (\sin x)^3 dx$$

2.

$$\int \tan x \, dx$$

3.

$$\int \frac{x^3 + 2x - 4}{x - 1} \, dx$$

4.

$$\int \frac{1}{(x+1)(x-1)^2} \, dx$$

5.

$$\int x \cos x \, dx$$

6.

$$\int \ln x \, dx$$

2.3 中档题（10’13’15’）

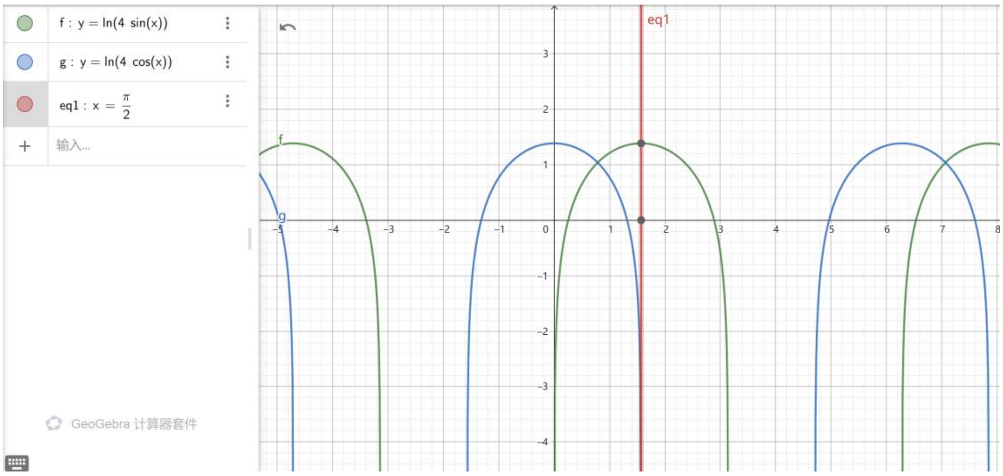
1.

$$\int (2\sqrt{1+x^3} + \frac{3x^3}{\sqrt{1+x^3}})\ dx$$

2.

$$\int_0^{\pi/2} \ln(4\sin x)\ dx$$

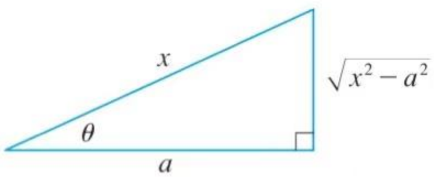
Tips: We have that $\int_0^{\pi/2} \ln(4\sin x)\,dx$ equals to $\int_0^{\pi/2} \ln(4\cos x)\,dx$ since $\sin x$ equals to $\cos x$ the interval [0, π/2].



3.

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+4}}$$

Tip: Let $x = 2\tan\theta$



$$\sec\theta = \frac{x}{a}$$

3 附录

3.1 公式表

$$\int 0dx = C \qquad \int \sin x\,dx = -\cos x + C \qquad \int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$$

$$\int 1dx = x + C \qquad \int \cos x\,dx = \sin x + C \qquad \int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C$$

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C\ \ (n \neq -1) \qquad \int \sec x \tan x\,dx = \sec x + C \qquad \int \csc x \cot x\,dx = -\csc x + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \qquad \int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x + C \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C$$

Power Rule	**Product Rule**	**Quotient Rule**	**Chain Rule**
$(x^n)' = nx^{n-1}$	$(uv)' = u'v + uv'$	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$	$\left(f\big(g(x)\big)\right)' = f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x)$

$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$	$\frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$	$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$
$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$	$\frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$	$\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a$
$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$	$\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x} \quad (x > 0)$
$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$	$\frac{d}{dx}(\cos^{-1} x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{d}{dx}(\ln\lvert x\rvert) = \frac{1}{x}$
$\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$	$\frac{d}{dx}(\tan^{-1} x) = \frac{1}{1+x^2}$	$\frac{d}{dx}(\log_a\lvert x\rvert) = \frac{1}{x \ln a}$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \qquad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\csc x = \frac{1}{\sin x} \qquad \sec x = \frac{1}{\cos x}$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$1 + \tan^2 x = \sec^2 x$$

$$1 + \cot^2 x = \csc^2 x$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \begin{cases} \cos^2 x - \sin^2 x \\ 1 - 2\sin^2 x \\ 2\cos^2 x - 1 \end{cases}$$

$$\sin^{-1} x = \arcsin x \qquad (\sin x)^{-1} = \csc x$$

$$\arcsin 1 = \frac{\pi}{2} \qquad \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$$

$$\arctan 1 = \frac{\pi}{4} \qquad \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4} \qquad \lim_{x\to\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2} \qquad \lim_{x\to-\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$$

$$x^a \cdot x^b = x^{a+b} \qquad \frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$$

$$(x^a)^b = x^{ab} \qquad x^a \cdot y^a = (xy)^a$$

$$x^0 = 1 \qquad x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$$

$$x^{-2} = \frac{1}{x^2} \qquad x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$$

$$\log_a(uv) = \log_a u + \log_a v \qquad \log_a\left(\frac{u}{v}\right) = \log_a u - \log_a v$$

$$\log_a x^p = p\log_a x \qquad \log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} = \frac{\ln x}{\ln a}$$

$$e^{\ln x} = x, \qquad \ln e^x = x$$

$$\ln 1 = 0, \qquad \ln e = 1$$

■ **分部积分法 Integration by Parts**

$$\int u dv = uv - \int v\, du$$

第一步：按照 LIPET 的次序，选择 u

第二步：剩下的东西(包括 dx 在内)，作为 dv

第三步：用 u 通过求导得到 du，用 dv 通过积分得到 v

第四步：直接套公式

LIPET 口诀

Logarithmic	(ex: $\ln x$, $\log x$)
Inverse trigonometric	(ex: $\arcsin x$, $\tan^{-1} x$)
Power	(ex: x, x^2, x^3, $1/x$)
Exponential	(ex: e^x, 2^x)
Trigonometric	(ex: $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$)

■ **换元法 (substitution)**

1. 除了要某个对象换成 u，还需要把 dx 换成 du。换完后若积分式中只有 u、没有 x，说明换对了。
2. 若换错了，就要尝试把其它对象设为 u。可能需多次尝试才能找到正确的换元对象。
3. 经验表明，换元时可优先试 ①最复杂的；②指数上的；③ log 里的；④ 根号下的；⑤分母的。

$\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx$ (错误的换元法演示)

$$= \int \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx \quad \left[u = \sin x, \frac{du}{dx} = \cos x, dx = \frac{du}{\cos x}\right]$$

$$= \int \frac{u}{\cos^2 x}\frac{du}{\cos x} \quad [\text{无法完全消去}x\text{，说明换错了}]$$

$\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx$ (正确的换元法演示)

$$= \int \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx \quad \left[u = \cos x, \frac{du}{dx} = -\sin x, dx = \frac{du}{-\sin x}\right]$$

$$= \int \frac{\sin x}{u^2}\frac{du}{-\sin x} = -\int \frac{1}{u^2}du \quad [\text{没有}x\text{，说明换对了}]$$

$$= \frac{1}{u} + C = \frac{1}{\cos x} + C = \sec x + C$$

■ **分式拆分法 Partial Fraction Decomposition**

$$\int_4^8 \frac{x}{x^2-2x-3}\mathrm{d}x = \int_4^8 \frac{x}{(x-3)(x+1)}\mathrm{d}x$$

$$\text{let } \boxed{\frac{x}{(x-3)(x+1)}} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+1}$$

$$= \frac{Ax + A + Bx - 3B}{(x-3)(x+1)} = \boxed{\frac{(A+B)x + (A-3B)}{(x-3)(x+1)}}$$

对比框中式子，分子的一次方项和常数项应对应相等：

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ A - 3B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 3/4 \\ B = 1/4 \end{cases}$$

$$\text{we have } \frac{x}{(x-3)(x+1)} = \frac{3/4}{x-3} + \frac{1/4}{x+1}$$

$$\int_4^8 \frac{x}{x^2-2x-3}\mathrm{d}x = \int_4^8 \left(\frac{3/4}{x-3} + \frac{1/4}{x+1}\right)dx$$

$$= \left[\frac{3}{4}\ln|x-3| + \frac{1}{4}\ln|x+1|\right]_4^8$$

$$= \frac{3}{4}(\ln 5 - \ln 1) + \frac{1}{4}(\ln 9 - \ln 5)$$

$$= \frac{1}{2}\ln 5 + \frac{1}{4}\ln 9 = \frac{1}{2}\ln 5 + \frac{1}{4}\ln 3^2$$

$$= \frac{1}{2}\ln 5 + \frac{1}{2}\ln 3 = \frac{1}{2}\ln 15$$

*3.2 问卷星输入需知(填写的前 20 名有几率获得证书)

定积分附加常数项为大写 C，需写在答案最后；括号()为**英文括号**；**多项式按指数顺序填写**；答案为整数则输入整数；π应为 pi[小写]；$\ln|x|$ 应为 ln abs(x)**[注意 ln 后的空格]**；反三角函数如$\sin^{-1} x$应写作 arcsin(x)；**Ax × sin *x* 应写作 Ax*sin(x)**；3x 直接写作 3x

若有次方，$\sqrt[k]{x}$**写作 x^(1/k)**；$\frac{x^k}{n}$写作 x^k/n；如$(\sin x)^3$应写作(sin**(x)**)^3。