# 数学社线代7

秩一矩阵 $A=\begin{bmatrix}\mathbf{1}&3&10\\\mathbf{2}&6&20\\\mathbf{3}&9&30\end{bmatrix}\rightarrow R=\begin{bmatrix}\mathbf{1}&3&10\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$

秩一矩阵的列空间是“一维”，此处所有的列都会通过 $\boldsymbol{u}=(1,2,3)$的直线。$A$ 的列分别是 $\boldsymbol{u}, 3\boldsymbol{u}, 10\boldsymbol{u}$，把这些数字放在一个行 $\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}=[1\quad 3\quad 10]$，你就可以得到特殊的秩一形式 $A=\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}$ ：

$$A = \text{列乘行} = \boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}} \qquad \begin{bmatrix}1&3&10\\2&6&20\\3&9&30\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{1}\\\mathbf{2}\\\mathbf{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{3}&\mathbf{10}\end{bmatrix}$$

---

## 矩阵的秩

数字 $m$ 与 $n$ 决定了矩阵的大小—但是不一定是线性系统真正的大小。比如 0 = 0 的方程式就不能算在里面。如果 $A$ 有两个完全相同的行，那么第二个行在消元之后会消失。同理若行 3 是行 1 与行 2 的组合，在三角 $U$ 中行 3 会变成都是 0，而且在简化阶梯形式 $R$ 中也是相同情形。我们不想计算零的行，$A$ 的真正大小是由秩(rank)来决定。

| | |
|---|---|
| 秩的定义 | **$A$ 的秩是主元的数量，数值为 $r$。** |

---

假设 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ **的未知数的个数比方程式的个数多**($n>m$，列数比行数多)，则至少存在一个自由列，$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 有非零解。

$$C=\begin{bmatrix}1 & 2 & 2 & 4\\ 3 & 8 & 6 & 16\end{bmatrix} \text{ 变成 } U=\begin{bmatrix}1 & 2 & 2 & 4\\ 0 & 2 & 0 & 4\end{bmatrix}$$

主元列　自由列

---

56　简洁的事实　每一个秩 $r$ 的 $m\times n$ 矩阵可以简化成 $(m\times r)$ 乘 $(r\times n)$。

$A=(A$ 的主元列$)\ (R$ 的前 $r$ 行$)=($列$)\ ($行$)$

## 秩，主元与自由元

# End