数学社线代6

3.1 向量空间

1 标准 n 维空间$\mathbf{R}^n$包含全部具有 n 个分量的实数列向量。

2 若 $\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{w}$ 在**向量空间** $\boldsymbol{S}$ 中，则所有的组合 $c\boldsymbol{v}+d\boldsymbol{w}$ 也必须在 $\boldsymbol{S}$ 中。

3 $\boldsymbol{S}$ 中的“向量”可以是矩阵或是 x 的函数。“一个点”空间 $\boldsymbol{Z}$ 由 $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 构成。

4 $\mathbf{R}^n$的**子空间**是$\mathbf{R}^n$里面的一个向量空间，例如：直线 $y=3x$ 在$\mathbf{R}^2$里面。

5 A 的**列空间**包含 $\boldsymbol{A}$ **的列**的所有组合：$\mathbf{R}^m$的子空间。

6 列空间包含所有的向量 $A\boldsymbol{x}$，所以当 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{C}(A)$中，$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 有解。

定义 向量空间的**子空间**是一个向量的集合(包含零向量)，这些向量满足两个要求：若 $\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{w}$ 是子空间中的向量且 c 是任意纯量，则

(i) $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}$ 在子空间中　　(ii) $c\boldsymbol{v}$ 在子空间中

一个包含 $\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{w}$ 的子空间，必须包含所有的线性组合 $c\boldsymbol{v}+d\boldsymbol{w}$。

定义　列空间包含列的所有线性组合，这些组合就就是所有可能的 $\boldsymbol{Ax}$，他们构成**列空间** $\boldsymbol{C(A)}$。

系统 $\boldsymbol{Ax=b}$ 有解 当且仅当 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{A}$ 的列空间中。

范例 4　假设

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \text{ 是 } \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \text{就是} \quad x_1\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

这两列的所有组合(就是列空间)形成$\mathbf{R}^3$的平面。我们画出一个特别的 $\boldsymbol{b}$ (列的组合)，$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{Ax}$ 落在这个平面。平面没有厚度，所以大部分$\mathbf{R}^3$中的右侧 $\boldsymbol{b}$ 不在这个列空间。因为是三个方程式与两个未知数，对于大部分的 $\boldsymbol{b}$ 来说系统都是无解。

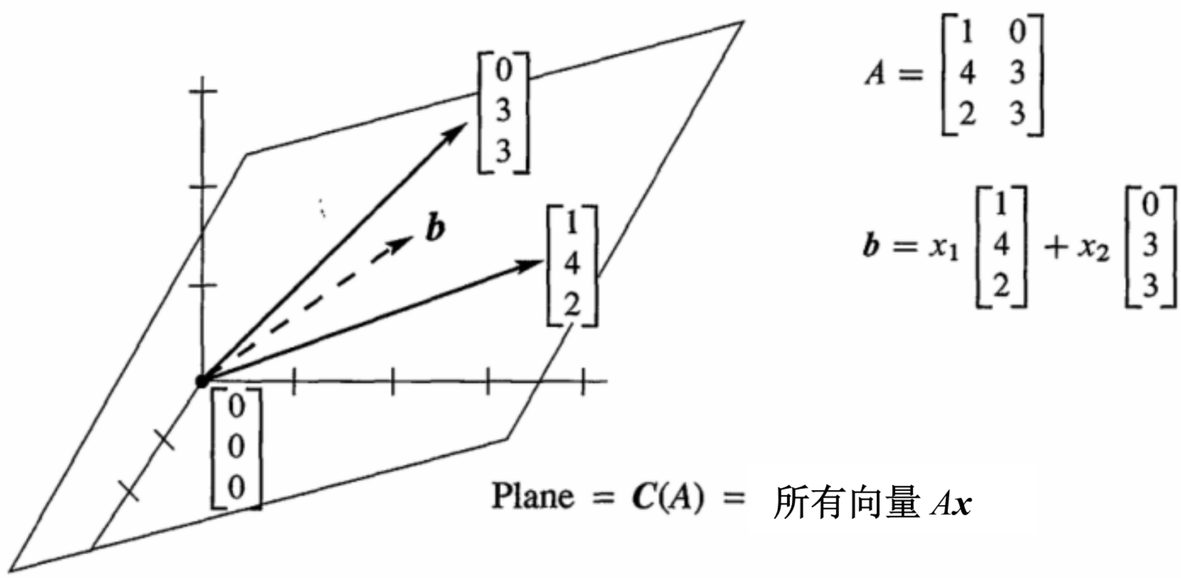

图 3.2：列空间 $\boldsymbol{C}(A)$是一个包含两个列的平面，当 $\boldsymbol{b}$ 落在这个平面时，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 有解，此时 $\boldsymbol{b}$ 是列的组合。

end