数学社线代5

2.5　逆矩阵

1　若矩阵 A 有逆矩阵，则 $A^{-1}A=I$ 且 $AA^{-1}=I$。

2　用来测试可逆性质的演绎法是消元法：A 必须具有 n 个(非零)主元。

3　用来测试可逆性质的代数法是 A 的行列式：$\det A\neq 0$。

4　用来测试可逆性质的方程式是 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$：$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 必须是唯一解。

5　若 A 与 B(相同大小)都是可逆，则 AB 也是可逆：$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$。

6　$AA^{-1}=I$ 是 A^{-1} 的 $\boldsymbol{n}$ **个列的** $\boldsymbol{n}$ **个方程式**，高斯-乔丹消元法使得[A I]到[I A^{-1}]。

定义　如果存在一个矩阵 A^{-1}“逆反”A，则矩阵 A 可逆：

$$\text{双边逆反}\quad \boldsymbol{A^{-1}A=I}\ \text{且}\ \boldsymbol{AA^{-1}=I} \tag{1}$$

$$A^{-1}\ \text{乘}\ A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}\ \ \text{得到}\ \ \boldsymbol{x}=A^{-1}A\boldsymbol{x}=A^{-1}\boldsymbol{b}$$

若 A 与 B 都是可逆，则 AB 也是可逆。AB 的逆矩阵是：

$$\boldsymbol{(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}} \tag{4}$$

$$(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$$

$$[K \quad e_1 \quad e_2 \quad e_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \text{开始对 } K \text{ 执行高斯-乔丹法}$$

$$\to \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{3/2} & \mathbf{-1} & \mathbf{1/2} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \tfrac{1}{2}(\text{行}\mathbf{1}) + \text{行 }\mathbf{2}$$

$$\to \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & -1 & 1/2 & 1 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{4/3} & \mathbf{1/3} & \mathbf{2/3} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \quad \tfrac{2}{3}(\text{行 }\mathbf{2}) + \text{行 }\mathbf{3}$$

$$\text{第三主元以上都是 0} \to \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{3/2} & \mathbf{0} & \mathbf{3/4} & \mathbf{3/2} & \mathbf{3/4} \\ 0 & 0 & 4/3 & 1/3 & 2/3 & 1 \end{bmatrix} \quad \tfrac{3}{4}(\text{行 }\mathbf{3}) + \text{行 }\mathbf{2}$$

$$\text{第二主元以上都是 0} \to \begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{3/2} & \mathbf{1} & \mathbf{1/2} \\ 0 & 3/2 & 0 & 3/4 & 3/2 & 3/4 \\ 0 & 0 & 4/3 & 1/3 & 2/3 & 1 \end{bmatrix} \quad \tfrac{2}{3}(\text{行 }\mathbf{2}) + \text{行 }\mathbf{1}$$

$$\begin{array}{l} \text{除以 } 2 \\ \text{除以 } 3/2 \\ \text{除以 } 4/3 \end{array} \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{1} & 0 & 0 & \mathbf{3/4} & \mathbf{1/2} & \mathbf{1/4} \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & \mathbf{1/2} & \mathbf{1} & \mathbf{1/2} \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1/4} & \mathbf{1/2} & \mathbf{3/4} \end{array}\right] = [I \quad \boldsymbol{x}_1 \quad \boldsymbol{x}_1 \quad \boldsymbol{x}_3] = [I \quad \boldsymbol{K}^{-1}]$$

从 3×6 矩阵$[K \quad I]$开始，最终得到$[I \quad K^{-1}]$。对于任意可逆矩阵 A，以下是整个高斯-乔丹消元法的程序(以简单一行来描述):

高斯-乔丹 $\qquad$ $\boldsymbol{A^{-1}}$ **乘** $\boldsymbol{[A \quad I]}$ **得到** $\boldsymbol{[I \quad A^{-1}]}$

主要观念的复习

1. 逆矩阵得到 $AA^{-1}=I$ 且 $A^{-1}A=I$。
2. 矩阵 A 有逆矩阵，当且仅当 A 有 n 个主元(允许交换行)。
3. **重要。**若有非零向量 $\boldsymbol{x}$ 使得 $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$，则 A 没有逆矩阵。
4. AB 的逆矩阵是反序乘积 $B^{-1}A^{-1}$，且$(ABC)^{-1}=C^{-1}B^{-1}A^{-1}$。
5. 高斯-乔丹方法求解 $AA^{-1}=I$ 得到 A^{-1} 的 n 个列。增广矩阵$[\,A \quad I\,]$可以使用行简化得到$[\,I \quad A^{-1}\,]$。

fin