数学社线代3

上节课回顾——向量空间与用向量证明柯西不等式涉及的循环论证

当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 或 $b_1=b_2=\cdots=b_n$ 时,$(*)$ 式显然成立.

设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中至少有一个不为 0,令

$$A=\sum_{i=1}^{n}a_i^2,B=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i,C=\sum_{i=1}^{n}b_i^2,$$

则 $A>0$.

设二次函数

$$f(x)=Ax^2+2Bx+C=\sum_{i=1}^{n}(a_i^2x^2+2a_ib_ix+b_i^2)=\sum_{i=1}^{n}(a_ix+b)^2\geq 0,$$

$\therefore \Delta=(2B)^2-4AC\leq 0\Longleftrightarrow AC\geq B^2$,则 $(*)$ 式成立.

要使 $(*)$ 式取等号,即 $\Delta=0$,则 $f(x)$ 有唯一零点,

即有唯一实数 x 使

$$a_ix+b_i=0(i=1,2,\cdots,n).$$

若 $x=0$,则 $b_i=0(i=1,2,\cdots,n)$,

若 $x\neq 0$,则 $a_i=-\frac{1}{x}b_i(i=1,2,\cdots,n)$.

综上,$(*)$ 式成立,当且仅当 $b_i=0(i=1,2,\cdots,n)$ 或 $\exists\, k\in\mathbb{R},a_i=kb_i(i=1,2,\cdots,n)$ 时取等号.

---

1 $A=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{bmatrix}$是 3×2 矩阵：$m=3$ 行与 $n=2$ 列。

2 $A\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$ 是列的组合，$A\boldsymbol{x}=x_1\begin{bmatrix}1\\3\\5\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}2\\4\\6\end{bmatrix}$。

3 $A\boldsymbol{x}$ 的 3 个分量是 A 的 3 个行与向量 $\boldsymbol{x}$ 的点积：

每次处理一行 $\begin{bmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7\\8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\cdot 7+2\cdot 8\\3\cdot 7+4\cdot 8\\5\cdot 7+6\cdot 8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}23\\53\\83\end{bmatrix}$

4 矩阵形式的方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$：使用$\begin{bmatrix}2&5\\3&7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\end{bmatrix}$ 取代 $\begin{matrix}2x_1+5x_2=b_1\\3x_1+7x_2=b_2\end{matrix}$。

5 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的解可以写成 $\boldsymbol{x}=A^{-1}\boldsymbol{b}$，但是有些矩阵不允许 A^{-1}。

三个向量 $\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}$ $\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}$ $\boldsymbol{w}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$

在三维空间他们的线性组合是 $x_1\boldsymbol{u}+x_2\boldsymbol{v}+x_3\boldsymbol{w}$：

向量的组合

$$x_1\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}+x_3\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2-x_1\\x_3-x_2\end{bmatrix} \quad (1)$$

重要事项：利用矩阵改写组合，$\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}$ 变成矩阵 A 的列，矩阵乘向量(x_1,x_2,x_3)：

矩阵乘向量，列的组合

$$A\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2-x_1\\x_3-x_2\end{bmatrix} \quad (2)$$

方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\qquad &= b_1 \\ -x_1 + x_2 \qquad &= b_2 \\ -x_2 + x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

解 $\boldsymbol{x}=A^{-1}\boldsymbol{b}$

$$\begin{aligned} x_1 &= b_1 \\ x_2 &= b_1 + b_2 \\ x_3 &= b_1 + b_2 + b_3 \end{aligned}$$

行的点积
列的组合

$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 11 \end{bmatrix}$$

被行乘

$A\boldsymbol{x}$ 来自点积，每个行乘列 $\boldsymbol{x}$:

$$A\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} (\text{行}\,1)\cdot\boldsymbol{x} \\ (\text{行}\,2)\cdot\boldsymbol{x} \\ (\text{行}\,3)\cdot\boldsymbol{x} \end{bmatrix} \tag{6}$$

被列乘

$A\boldsymbol{x}$ 是列向量的组合：

$$A\boldsymbol{x}=x\,(\text{列}\,1)+y\,(\text{列}\,2)+z\,(\text{列}\,3)$$

$$I=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

永远存在乘法 $I\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$

$$\int in$$