数学社线代2

1. $\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$与$\boldsymbol{w}=\begin{bmatrix}4\\5\end{bmatrix}$的“**点积**”是 $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}=(1)(4)+(2)(5)=4+10=\mathbf{14}$。

2. $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}$是零，所以$\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}1\\3\\2\end{bmatrix}$ 与 $\boldsymbol{w}=\begin{bmatrix}4\\-4\\4\end{bmatrix}$垂直，$(1)(4)+(3)(-4)+(2)(4)=\mathbf{0}$。

3. $\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}1\\3\\2\end{bmatrix}$的长度平方是 $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}=1+9+4=14$，**长度是**$\|\boldsymbol{v}\|=\sqrt{14}$ 。

4. $\boldsymbol{u}=\dfrac{\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|}=\dfrac{\boldsymbol{v}}{\sqrt{14}}=\dfrac{1}{\sqrt{14}}\begin{bmatrix}1\\3\\2\end{bmatrix}$有长度$\|\boldsymbol{u}\|=1$，检验$\dfrac{1}{14}+\dfrac{9}{14}+\dfrac{4}{14}=1$ 。

5. $\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{w}$ 之间的角度θ 有 $\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}}{\|\boldsymbol{v}\|\|\boldsymbol{w}\|}$。

6. $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$与$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$之间的角度有 $\cos\theta=\dfrac{1}{(1)(\sqrt{2})}$， 则角度$\theta=45°$。

7. 所有的角都有$|\cos\theta|\le 1$，所以所有的向量都有 $\boxed{|\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}|\le\|\boldsymbol{v}\|\|\boldsymbol{w}\|\ 。}$

两个向量 $\boldsymbol{v}=(v_1,v_2)$与 $\boldsymbol{w}=(w_1,w_2)$的**点积或内积**是数字 $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}$:

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}=v_1w_1+v_2w_2 \tag{1}$$

范例 1　向量 $\boldsymbol{v}=(4,2)$与 $\boldsymbol{w}=(-1,2)$有零点积：

点积为零，垂直向量　$\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}=-4+4=0$

点积 v·w 与 w·v 相等，无关 v 与 w 的顺序。

范例 3　点积在经济与商业都会用到，比如我们要买卖 3 个商品，他们的单价分别是(p_1, p_2, p_3)–-这是“价格向量”；我们买或卖的数量为(q_1, q_2, q_3)，卖的时候取正号，买的时候取负号。单价 p_1 的商品卖出 q_1 个得到 p_1q_1，全部收入(数量 q 乘价格 p)就是在**三维空间的点积** $\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{p}$：

$$\text{收入} = (q_1, q_2, q_3)\cdot(p_1, p_2, p_3) = q_1p_1 + q_2p_2 + q_3p_3 = \text{点积}$$

零点积表示账目平衡。如果 $\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{p} = 0$，全部销售额等于全部买进额，$\boldsymbol{p}$ 垂直 $\boldsymbol{q}$(在三维空间)。一家超市有几千种货品，货物的维度会非常高。

定义　向量 $\boldsymbol{v}$ 的长度 $\|\boldsymbol{v}\|$ 等于 $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}$ 的平方根：

$$\text{长度}= \|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}} = (v_1{}^2 + v_2{}^2 + \ldots + v_n{}^2)^{1/2}$$

定义　单位向量 $\boldsymbol{u}$ 是长度为 1 的向量，$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u} = 1$。

$$\text{单位向量}\quad \boldsymbol{i} = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\ \boldsymbol{j} = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},\ \boldsymbol{u} = \begin{bmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{bmatrix}$$

当 $\theta = 0$，水平向量 $\boldsymbol{u}$ 就是 $\boldsymbol{i}$；当 $\theta = 90°$(或 $\pi/2$ 弧度(radian))，垂直向量就是 $\boldsymbol{j}$。因为 $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$，在任何角度下分量 $\cos\theta$ 与 $\sin\theta$ 得到 $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u} = 1$。

单位向量 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} / \|\boldsymbol{v}\|$ 是在 $\boldsymbol{v}$ 方向的单位向量。

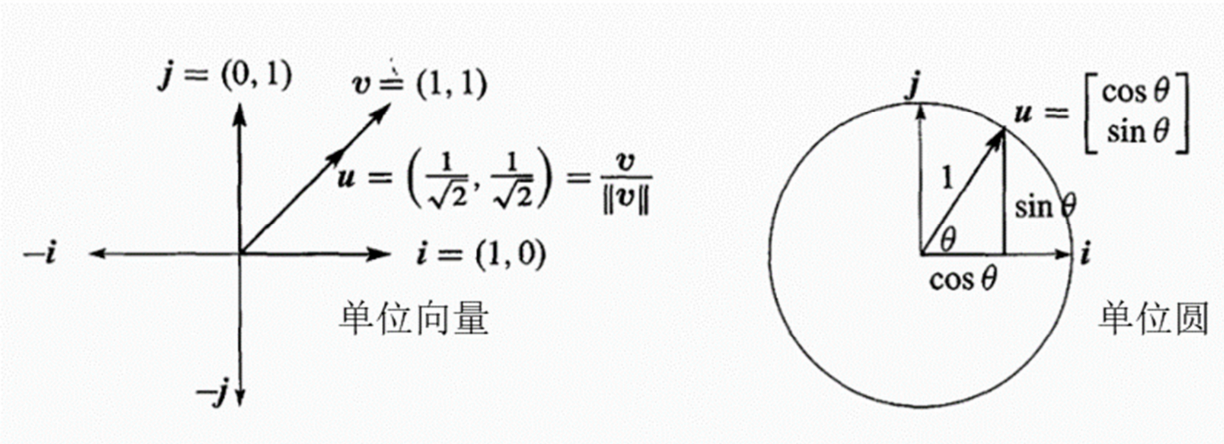

图 1.7：坐标向量 $\boldsymbol{i}$ 与 $\boldsymbol{j}$。位于 45°(左图)的单位向量 $\boldsymbol{u}$ 是 $\boldsymbol{v} = (1, 1)$除以本身长度$\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{2}$。单位向量 $\boldsymbol{u} = (\cos\theta, \sin\theta)$的角度是 θ。

图 1.9 清楚显示 $\boldsymbol{u} = (\cos\theta, \sin\theta)$与 $\boldsymbol{i} = (1, 0)$，点积 $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{i} = \cos\theta$，这是两个向量夹角的余弦。

旋转任何角度 α 之后，他们仍然是单位向量。向量 $\boldsymbol{i} = (1, 0)$旋转至$(\cos\alpha, \sin\alpha)$，向量 $\boldsymbol{u}$ 旋转至$(\cos\beta, \sin\beta)$，其中 $\beta = \alpha + \theta$。他们的点积是 $\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$，由三角定理得到 $\cos(\beta - \alpha) = \cos\theta$。

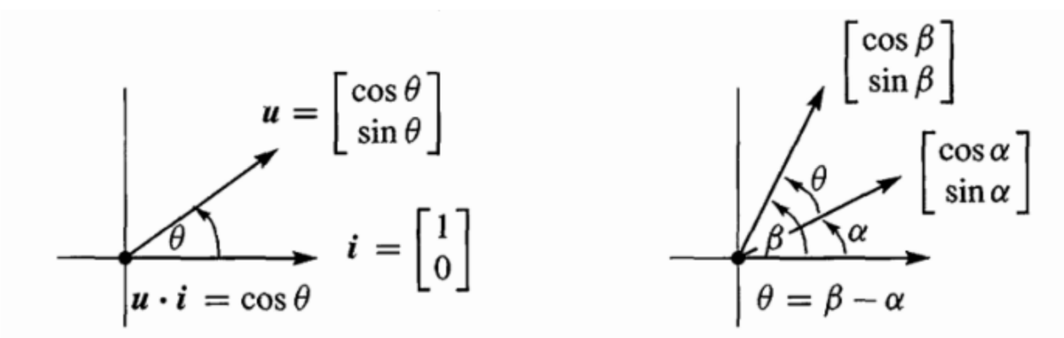

图 1.19：单位向量：$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{U}$ 等于 θ(夹角)的余弦

余弦公式　若 $\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{w}$ 是非零向量，则 $\dfrac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}}{\|\boldsymbol{v}\|\|\boldsymbol{w}\|}=\cos\theta$ (5)

无论什么角度，$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{v}/\|\boldsymbol{v}\|$与 $\boldsymbol{U}=\boldsymbol{w}/\|\boldsymbol{w}\|$ 的点积不会超过 1，这就是“**苏瓦兹不等式**”：$|\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}|\le\|\boldsymbol{v}\|\,\|\boldsymbol{w}\|$——更准确的说法是柯西-苏瓦兹-布尼亚克斯基不等式，分别在法国、德国、俄罗斯发表(也许有其他地方，这是数学上最重要的不等式)。由于$|\cos\theta|$不会超过 1，余弦公式得到两个伟大的不等式：

苏瓦兹不等式　$|\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}|\le\|\boldsymbol{v}\|\|\boldsymbol{w}\|$

三角不等式　$\|\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}\|\le\|\boldsymbol{v}\|+\|\boldsymbol{w}\|$

范例 6　$\boldsymbol{v}=(a,b)$与 $\boldsymbol{w}=(b,a)$的点积是 $2ab$，两者的长度都是$\sqrt{a^2+b^2}$，苏瓦兹不等式 $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}\le\|\boldsymbol{v}\|\,\|\boldsymbol{w}\|$得到 $\boldsymbol{2ab\le a^2+b^2}$。

如果写成 $x=a^2$ 与 $y=b^2$，会得到更著名的结果。“几何平均值”$\sqrt{xy}$ 不大于“算术(arithmetic)平均值”$=(x+y)/2$。

几何平均值 ≤ 算术平均值　　$ab\le\dfrac{a^2+b^2}{2}$ 变成 $\sqrt{xy}\le\dfrac{x+y}{2}$

范例 5 的 $a=2$ 与 $b=1$，所以 $x=4$ 与 $y=1$，几何平均值$\sqrt{xy}=2$ 小于算术平均值$(1+4)/2=2.5$。

End